

# סטטיסטיקה אקטוארית

פרק 16 - פונקציה יוצרת מומנטים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## פונקציה יוצרת מומנטים:

### רקע:

פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי כלשהו מוגדרת להיות:  $M_X(t) = E(e^{tx})$ .  
אם מדובר במשתנה מקרי בדיד, הפונקציה יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_k e^{tk} \cdot P(X = k)$$

אם מדובר במשתנה מקרי רציף, פונקציית יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_x e^{tx} \cdot f(x) dx$$

המומנט מסדר  $n$  מוגדר להיות:  $E(X^n)$ .

מומנט מסדר  $n$  של משתנה מקרי  $X$  מתקבל מהנגזרת ה- $n$ ית לפי  $t$  של פונקציית

יוצרת המומנטים  $M_X(t)$  בנקודה שבה  $t = 0$ . כלומר:  $M_X^{(n)}(t)|_{t=0} = E(X^n)$ .

### משפט:

קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.

### תזכורת מתמטית לנגזרות:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(k)' = 0$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{כלל שרשרת}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הראו שהפונקציה יוצרת המומנטים של ההתפלגות המעריכית:  $X \sim \exp(\lambda)$ ,

היא:  $\frac{\lambda}{\lambda - t}$ . מצאו את המומנט הראשון והמומנט השני של ההתפלגות.

## שאלות:

(1) נתונה פונקציה ההסתברות הבאה למשתנה מקרי בדיד.

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים.

ב. מצאו את התוחלת על סמך סעיף א'.

|        |               |               |               |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| $X$    | 1             | 2             | 3             |
| $P(X)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

(2) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות הבינומית:  $X \sim B(n, p)$ , ומצאו את המומנט הראשון והשני של הפונקציה.

(3) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של ההתפלגות הגיאומטרית:  $X \sim G(P)$ , וחשבו את תוחלת של ההתפלגות מתוך פונקציית יוצרת המומנטים.

(4) מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של התפלגות הפואסונית:  $x \sim p(\lambda)$ . מצאו את המומנט הראשון והשני של ההתפלגות.

(5) יהי  $X$  משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצאו את ערכו של  $A$ .

ב. מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של  $X$ .

(6) יהי  $X$  משתנה מקרי עם תוחלת 5 ושונות 16, ותהי  $m_x(t)$  פונקציית יוצרת המומנטים של  $X$ .  $Y$  הינו משתנה מקרי עם פונקציית יוצרת מומנטים  $m_y(t)$ ,

$$\text{ונתון: } m_y(t) = t \cdot m_x(t).$$

חשבו את התוחלת והשונות של  $Y$ .

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. פונקציה יוצרת מומנטים: } \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{3t} \quad \text{ב. } 1\frac{2}{3}$$

$$(2) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים: } (e^t \cdot p + 1 - p)^n$$

$$(3) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים: } \frac{e^t p}{1 - e^t \cdot (1 - p)}$$

$$(4) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים: } e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{1 - e^{-7}} \quad \text{ב. פונקציה יוצרת מומנטים: } \frac{e^7}{e^7 - 1} \cdot \frac{e^{7(t-1)} - 1}{t - 1}$$

$$(6) \quad \text{תוחלת: 1, שונות: 9.}$$

## נספחים:

| פונקציית התפלגות מצטברת<br>$F(X)$                                                                | פונקציית צפיפות<br>$f(X)$                                                                 | התפלגות                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $f_x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$ | $f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ | אחיד<br>$U(a,b)$              |
| $f_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$            | $f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ | מעריכי<br>$\exp(\lambda)$     |
| $\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$                                                          | $f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$                 | נורמלית<br>$N(\mu, \sigma^2)$ |

| התפלגות                       | $E(X)$              | $VAR(X)$              | $M_X(t)$                             |
|-------------------------------|---------------------|-----------------------|--------------------------------------|
| אחיד<br>$U(a,b)$              | $\frac{b-a}{2}$     | $\frac{(b-a)^2}{12}$  | $\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$     |
| מעריכי<br>$\exp(\lambda)$     | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\frac{\lambda}{\lambda - t}$        |
| נורמלית<br>$N(\mu, \sigma^2)$ | $\mu$               | $\sigma^2$            | $e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ |

| משתנה מקרי                 | משמעות                                                                                                                                  | $P_X(x)$                                           | $E(x)$        | $Var(x)$            | $M_X(t)$                |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|
| בינומי<br>$Bin(n, p)$      | חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי $n$ פעמים:<br>$P$ ההסתברות להצלחה.<br>$1 - P = q$<br>ההסתברות לכישלון<br>$X$ - מספר ההצלחות | $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$<br>$x = 0, 1, \dots, n$ | $n \cdot p$   | $n \cdot p \cdot q$ | $[pe^t + q]^n$          |
| גיאומטרי<br>$G(P)$         | חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה.<br>$X$ - מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה.                                   | $pq^{x-1}$<br>$x = 1, 2, \dots, \infty$            | $\frac{1}{p}$ | $\frac{q}{p^2}$     | $\frac{pe^t}{1 - qe^t}$ |
| פואסוני<br>$Pois(\lambda)$ | $X$ - מספר ההופעות בלידת זמן.<br>מ"מ המקבל ערכים $0, 1, \dots, \infty$ .                                                                | $e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$                | $\lambda$     | $\lambda$           | $e^{\lambda(e^t - 1)}$  |